تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضاَ یاسی‌پور

پارادوکس سلمانی

پارادوکس علی‌الظّاهر گزاره‌ای راســت اســت که خودش را نقض می‌کند، یا به وضعیتی منجر می‌شود که به‌نظر می‌رسد از منطق سرپیچی کرده است. در سال ۱۹۰۱، برتراند راسل[1]، ریاضی‌دان بریتانیایی، از پارادوکس سلمانی برای مطرح‌کردن نقض‌های موجود در نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها استفاده کرد.

جمیع مردان دهکده‌ای یا صورتشــان را خودشــان اصلاح می‌کنند یا توسط یک سلمانی (که خودش یکی از مردان دهکده است) اصلاح می‌شوند. سلمانی بر این ادعاست که تنها صورت دهکده‌نشین‌های مذکری را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند. در این صورت چه کسی صورت خود سلمانی را اصلاح می‌کند؟

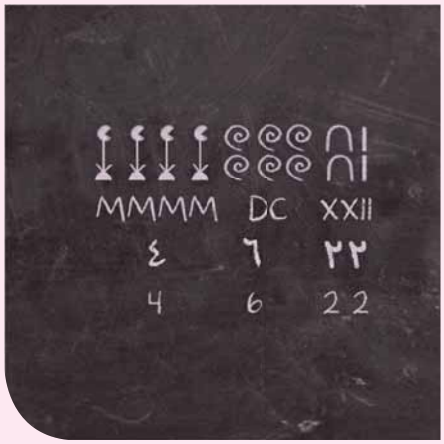
پارادوکس مزبور برحســب مجموعه‌ها از ما می‌خواهد مجموعه‌ای را در نظر بگیریم که دارای جمیع زیرمجموعه‌هایی باشد که خودشان را به‌عنوان عضو ندارند. در این صورت آیا خود این مجموعه یک عضو خودش است؟ راه‌حل فوری چنین پارادوکس‌هایی این بود که نظریهٔ مجموعه‌ها را با یک‌سری قاعده یا «اکسیوم»[2]؛ با ایجاد سلسله‌مراتبی از مجموعه‌هایی که مجازند تنها اعضای مجموعه‌های بالای خودشــان در این سلسله‌مراتب باشند، محدود کند. با این همه چنین نیست که ظریف‌ترین راه‌حل‌های نظریه‌های اکسیوماتیک مجموعه‌ها به‌گونه‌ای وسیع مورد پذیرش واقع شده باشند.

اگر ســلمانی مورد بحث صورت خودش را خودش اصلاح کند، در این صورت ادعایش که تنها صورت کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان صورت خود را اصلاح نمی‌کنند، دروغ است. اما اگر صورت خودش را اصلاح نکند، در این صورت ادعایش این است که صورت خود را اصلاح می‌کند! به این ترتیب به هر طریق آن را مطرح کنید، تناقضی به‌وجود می‌آید.

اعداد

اعداد در ابتدایی‌ترین صورتشان، تنها صفت‌هایی هستند که کمیت را توصیف می‌کنند. به‌عنوان نمونه، می‌توانیم بگوییم «سه صندلی» یا «دو گوسفند». اما حتی به‌عنوان یک صفت، به‌طور غریزی توجه داریم که «دو و نصفی بز» بی‌معنی است. در این صورت، اعداد می‌توانند کاربردها و معانی متفاوت داشته باشند.

اعداد، از آنجا که مردمان باستانی آن‌ها را به طرق مختلف به‌کار می‌بردند، معانی نمادین به خود اختصاص داده‌اند؛ نظیر «نیلوفر آبی» که در هیروگلیف‌های مصری عدد ۱۰۰۰ را توصیف می‌کند. گرچه این شیوهٔ بصری از لحاظ زیبایی‌شناسی خوشایند است، به‌کار عملیات جبری نمی‌آید. پس با بیشتر شدن کاربردهای اعداد، نمادهاشان ساده‌تر می‌شدند. رومی‌ها برای نمایش حوزهٔ وسیعی از اعداد، از حوزهٔ کوچکی از علائم اساسی استفاده می‌کردند. اما انجام محاسبات با استفاده از اعداد بزرگ، همچنان پیچیده بود.



دستگاه مدرن اعداد امروزی‌مان از تمدن‌های مسلمانان هزارهٔ اول بعد از میلاد به ارث رسیده است. استفاده از ۱۰ به عنوان پایه، انجام محاسبات پیچیده را بسیار آسان‌تر می‌کند.

اعداد طبیعی

اعداد طبیعی اعداد شمارش ساده‌اند (۱، ۲، ۳، ۴، ...). مهارت در شمارش به‌گونه‌ای تنگاتنگ با توسعهٔ جوامع پیچیده از طریق تجارت، فناوری و کاربرد مدارک و اسناد مرتبط است. گرچه شمارش به چیزی بیشتر از اعداد نیاز دارد. این عمل شامل جمع و در نتیجهٔ آن تفریق نیز می‌شود.

به مجرد اینکه شمارش را معرفی کردیم، عملیات روی اعداد نیز قسمتی از فرهنگمان می‌شود. یعنی اعداد، دیگر توصیف‌کننده‌ای ساده نیستند و به اشیایی تبدیل می‌شوند که می‌توانند یکدیگر را تغییر دهند. زمانی که عمل جمع درک شود، به دنبال آن ضرب، به‌عنوان راهی برای نگریستن به مجموعات مجموعه‌ها، می‌آید. مثلاً اینکه چند شیء در پنج گروه شش‌تایی وجود دارند؟ ـ در حالی‌که تقسیم راهی برای توصیف عمل مقابل ضرب مطرح می‌کند ـ مثلاً اینکه اگر سی شیء به پنج گروه مساوی تقسیم شوند، چند شیء در هر گروه وجود دارند؟

اما در این مورد پرسش‌هایی به‌وجود می‌آیند. تقسیم ۳۱ به ۵ گروه مساوی، به چه معنی است؟ حاصل تقسیم ۱ بر ۱۰ چیست؟ برای معنی دادن به این پرسش‌ها نیاز داریم که به بیرون از «اعداد طبیعی»[3] قدم بگذاریم.

پی‌نوشت‌ها

1. Bertrand Russell
2. axiom
3. natural numbers